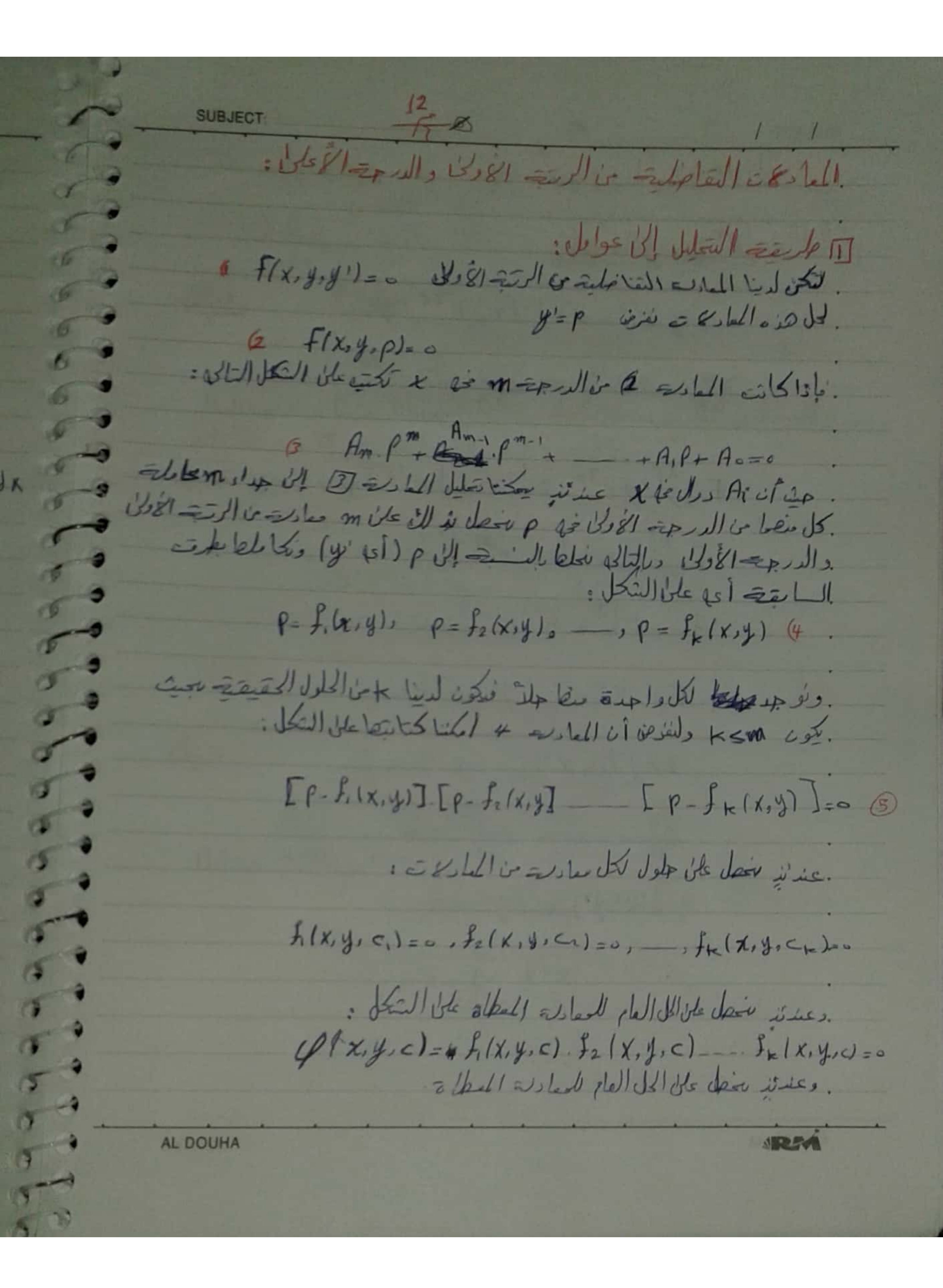


المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأعلى:

1 طريقة التحليل إلى عوامل:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى $F(x,y,y')=0$ (1)

لحل هذه المعادلات نفرض $y'=p$

$$F(x,y,p)=0 \quad (2)$$

فإذا كانت المعادلة (2) من الدرجة m نحو p تكتب على الشكل التالي:

$$A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_1 p + A_0 = 0 \quad (3)$$

حيث أن A_i دوال لـ x عندئذٍ يمكننا تحليل المعادلة (3) إلى جداء m عاملاً كل منها من الدرجة الأولى نحو p نحصل بذلك على m معادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبالتالي نحلها بالنسبة إلى p (أي y') ونحلها بطرق السابقة أي على الشكل:

$$p=f_1(x,y),\quad p=f_2(x,y),\ \dots,\ p=f_k(x,y) \quad (4)$$

ولو وجد لكل واحدة منها حلاً فيكون لدينا k من الحلول الحقيقية بحيث يكون $k\le m$ ولنفرض أن المعادلة (4) أمكننا كتابتها على الشكل:

$$[p-f_1(x,y)]\,[p-f_2(x,y)]\ \dots\ [p-f_k(x,y)]=0 \quad (5)$$

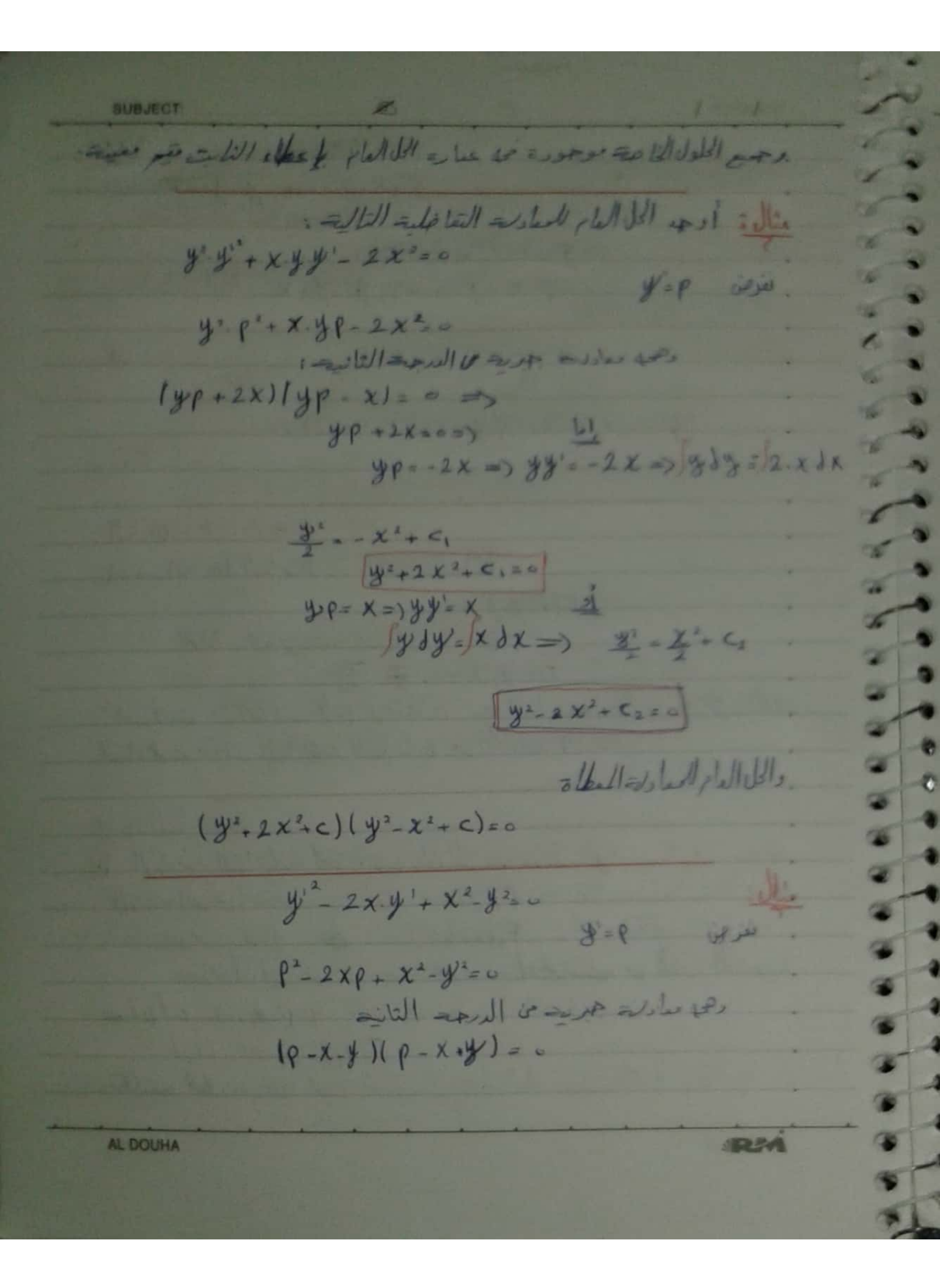
عندئذٍ نحصل على حلول لكل معادلة من المعادلات:

$$f_1(x,y,c_1)=0,\ f_2(x,y,c_2)=0,\ \dots,\ f_k(x,y,c_k)=0$$

وعندئذٍ نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة على الشكل:

$$\varphi(x,y,c)=f_1(x,y,c)\cdot f_2(x,y,c)\dots f_k(x,y,c)=0$$

وعندئذٍ نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة



وجميع الحلول الخاصة موجودة في عبارة الحل العام بإعطاء الثابت قيم معينة.

مثال ٢: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$y^2 y'^2 + x y y' - 2x^2 = 0$

نفرض $y' = p$

$y^2 p^2 + x y p - 2x^2 = 0$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية:

$(yp + 2x)(yp - x) = 0 \Rightarrow$

إما $yp + 2x = 0 \Rightarrow$

$yp = -2x \Rightarrow yy' = -2x \Rightarrow \int y\,dy = \int 2 \cdot x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -x^2 + c_1$

$\boxed{y^2 + 2x^2 + c_1 = 0}$

أو $yp = x \Rightarrow yy' = x$

$\int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_2$

$\boxed{y^2 - 2x^2 + c_2 = 0}$

والحل العام للمعادلة المعطاة

$(y^2 + 2x^2 + c)(y^2 - x^2 + c) = 0$

مثال:

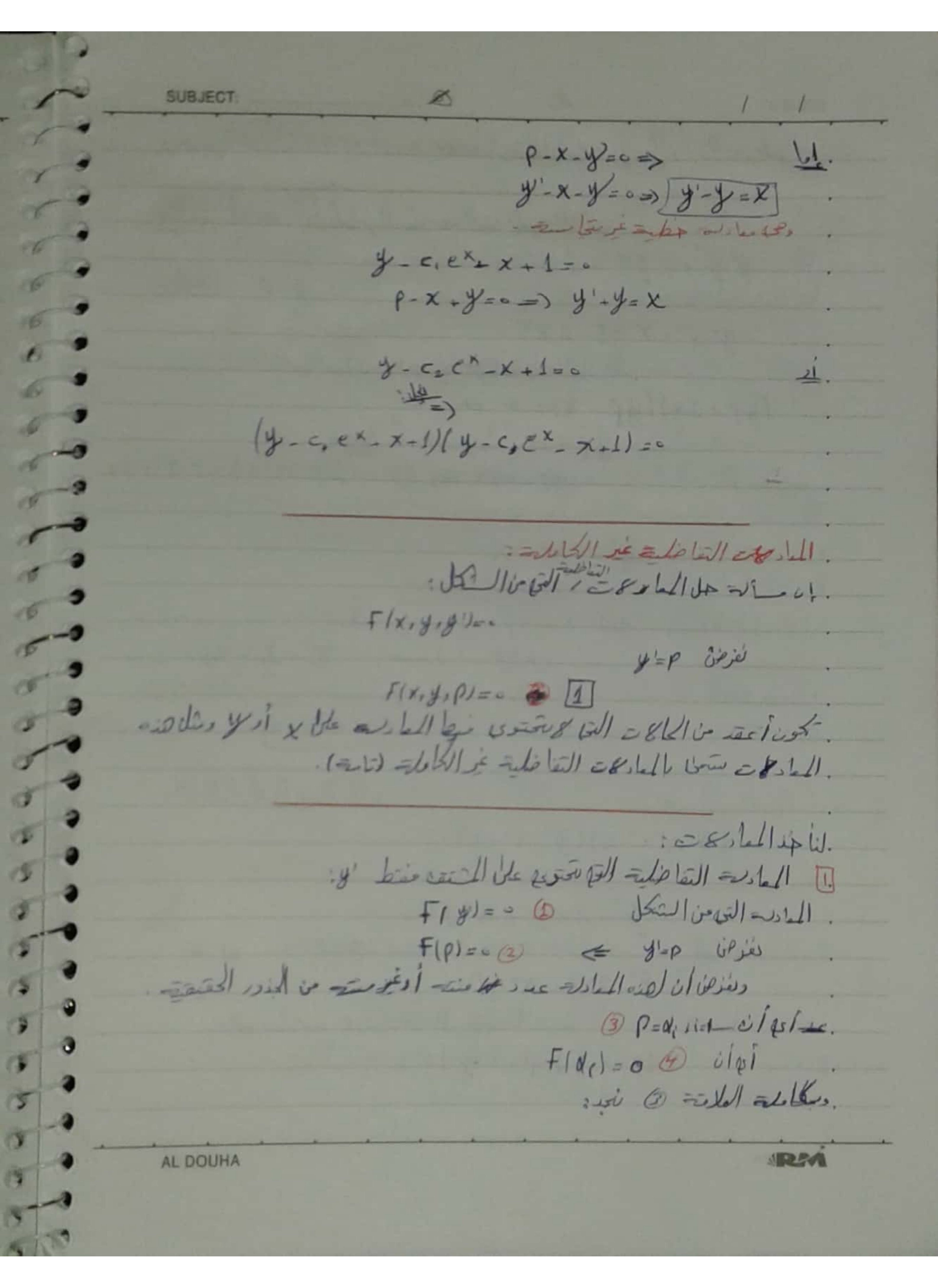
$y'^2 - 2x \cdot y' + x^2 - y^2 = 0$

نفرض $y' = p$

$p^2 - 2xp + x^2 - y^2 = 0$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية

$(p - x - y)(p - x + y) = 0$



SUBJECT: / /

إما

$p - x - y = 0 \Rightarrow$

$y' - x - y = 0 \Rightarrow \boxed{y' - y = x}$

وهي معادلة خطية غير متجانسة.

$y - c_1 e^{x} - x + 1 = 0$

$p - x + y = 0 \Rightarrow y' + y = x$

أو

$y - c_2 e^{x} - x + 1 = 0$

$\Rightarrow$

$(y - c_1 e^{x} - x - 1)(y - c_2 e^{x} - x + 1) = 0$

المعادلات التفاضلية غير الكاملة:

إن مسألة حل المعادلات التفاضلية التي من الشكل:

$F(x, y, y') = 0$

نفرض $y' = p$

$F(x, y, p) = 0$ [1]

تكون أعقد من الحالات التي يحتوي فيها المعادلة على x أو y ومثل هذه المعادلات تسمى بالمعادلات التفاضلية غير الكاملة (تامة).

لنأخذ المعادلات:

[1.] المعادلة التفاضلية التي تحتوي على المشتق فقط y':

المعادلة التي من الشكل $F(y') = 0$ (1)

نفرض أن $y' = p \Rightarrow F(p) = 0$ (2)

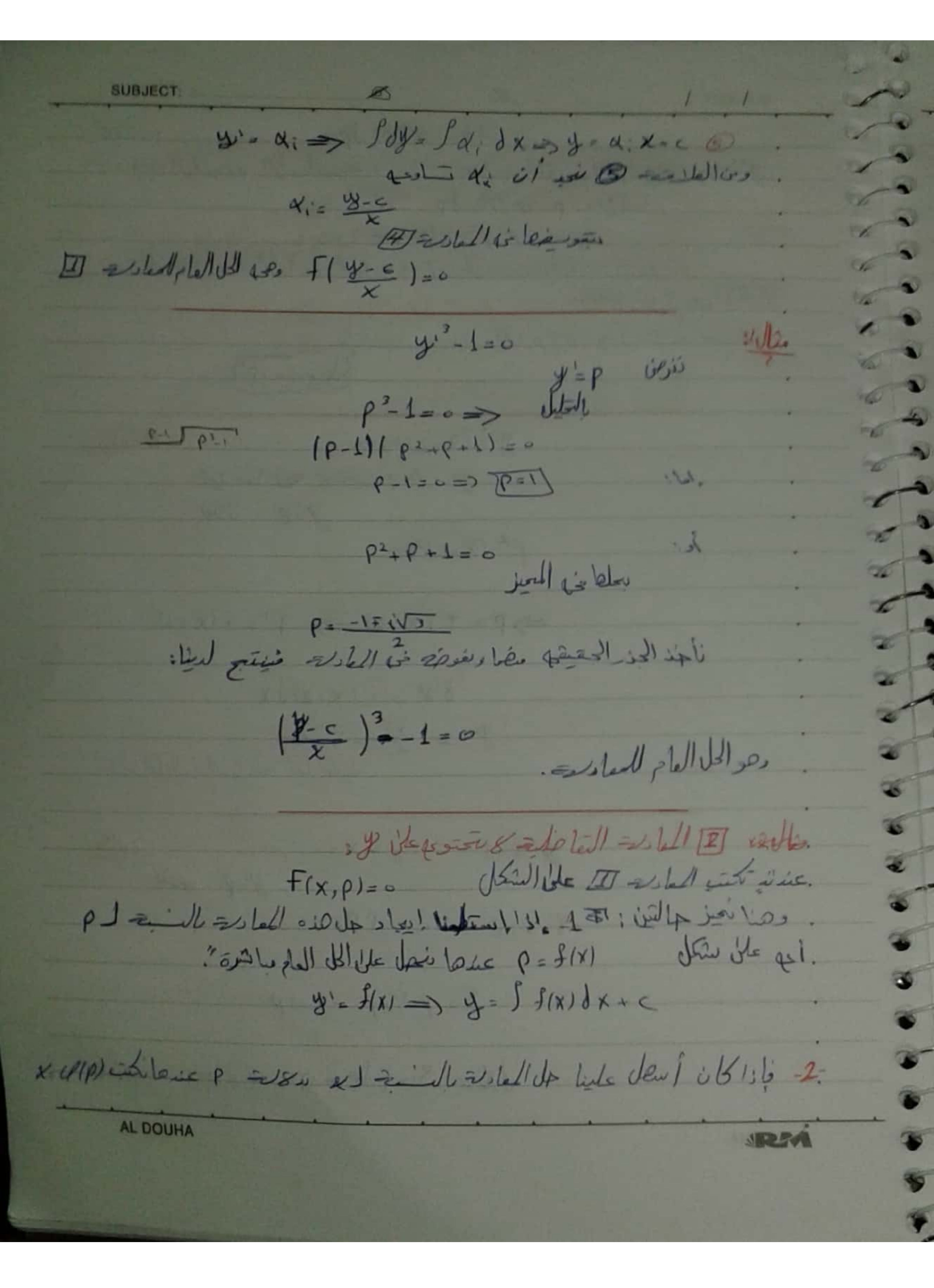
ونفرض أن لهذه المعادلة عدد منته أو غير منته من الجذور الحقيقية.

عندئذٍ أي أن $p = \alpha_i$ (3)

أي أن $F(\alpha_i) = 0$ (4)

وبمكاملة العلاقة (3) نجد:

AL DOUHA



SUBJECT

$$y' = \alpha_i \Rightarrow \int dy = \int \alpha_i \, dx \Rightarrow y = \alpha_i x + c \quad (3)$$

ومن العلاقة (3) نجد أن α_i تساوي

$$\alpha_i = \frac{y-c}{x}$$

بتعويضها في المعادلة [4]

$$f\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$ وهو الحل العام للمعادلة [I]

مثال: $y'^3 - 1 = 0$

نفرض $y' = p$

بالتحليل $p^3 - 1 = 0 \Rightarrow$

$$(p-1)(p^2+p+1) = 0$$

إما: $p - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{p=1}$

أو: $p^2 + p + 1 = 0$

بعطائي المميز

$$p = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$$

نأخذ الجذر الحقيقي فقط ونعوضه في المعادلة فينتج لدينا:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - 1 = 0$$

وهو الحل العام للمعادلة.

خاصة [II] المعادلة التفاضلية لا تحتوي على y:

عندئذ تكتب المعادلة [II] على الشكل $F(x,p) = 0$

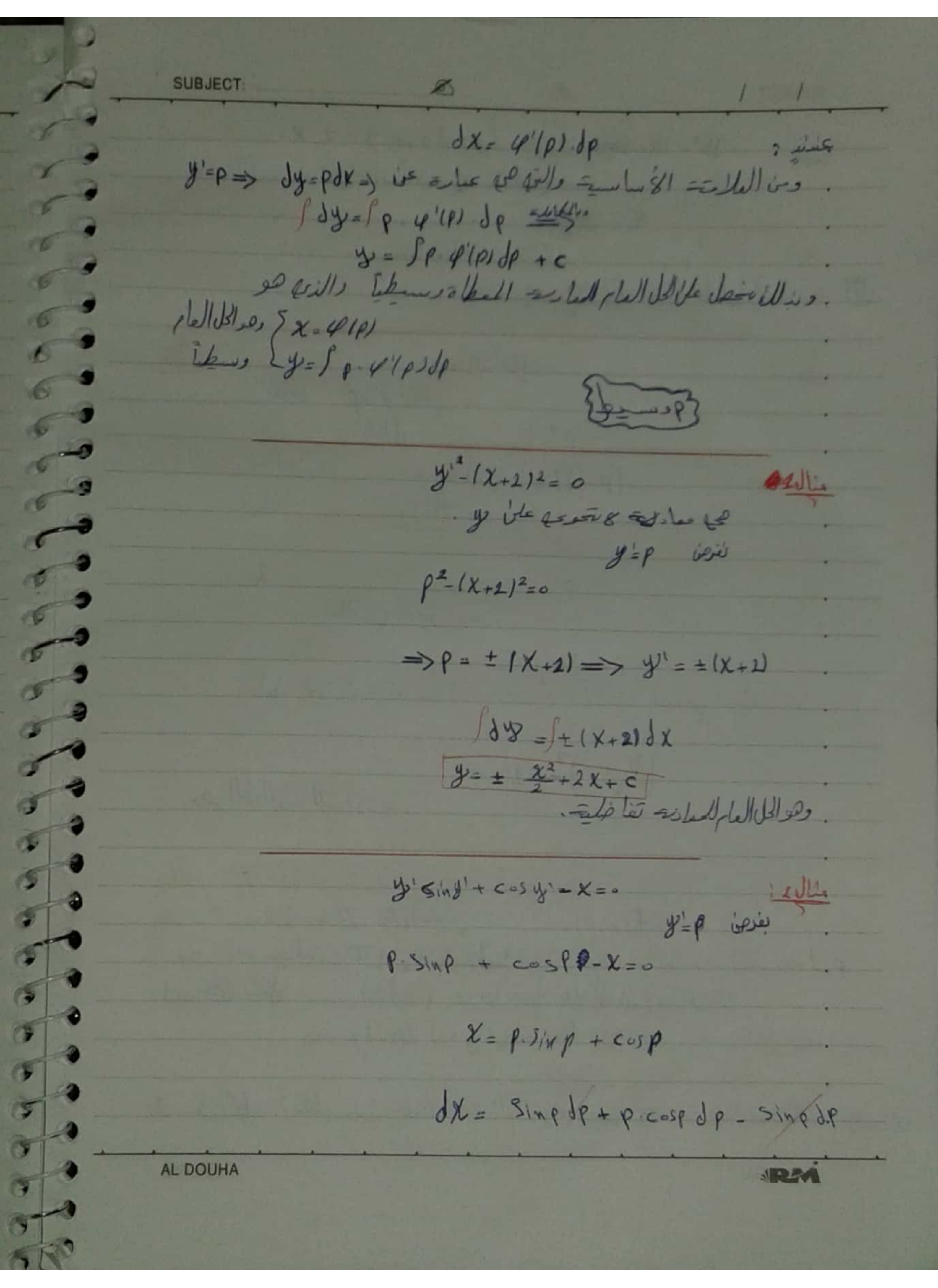
وهنا نميز حالتين: 1- إذا استطعنا إيجاد حل هذه المعادلة بالنسبة لـ p

أي على شكل $p = f(x)$ عندها نحصل على الحل العام مباشرة".

$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)\,dx + c$$

2- وإذا كان أسهل علينا حل المعادلة بالنسبة لـ x بدلالة p عندها نكتب $x = \varphi(p)$

AL DOUHA



عندئذٍ: $dx = \varphi'(p)\,dp$

ومن العلاقة الأساسية والتي هي عبارة عن $y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$

بالمكاملة $\int dy = \int p \cdot \varphi'(p)\,dp$

$$y = \int p \cdot \varphi'(p)\,dp + c$$

وبذلك نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة وسيطياً والذي هو

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p \cdot \varphi'(p)\,dp \end{cases}$$ وهو الحل العام وسيطياً

p وسيط

مثال 1: $y'^2 - (x+2)^2 = 0$

هي معادلة لا تحتوي على y.

نفرض $y' = p$

$$p^2 - (x+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = \pm(x+2) \Rightarrow y' = \pm(x+2)$$

$$\int dy = \int \pm(x+2)\,dx$$

$$y = \pm \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

وهو الحل العام للمعادلة تفاضلية.

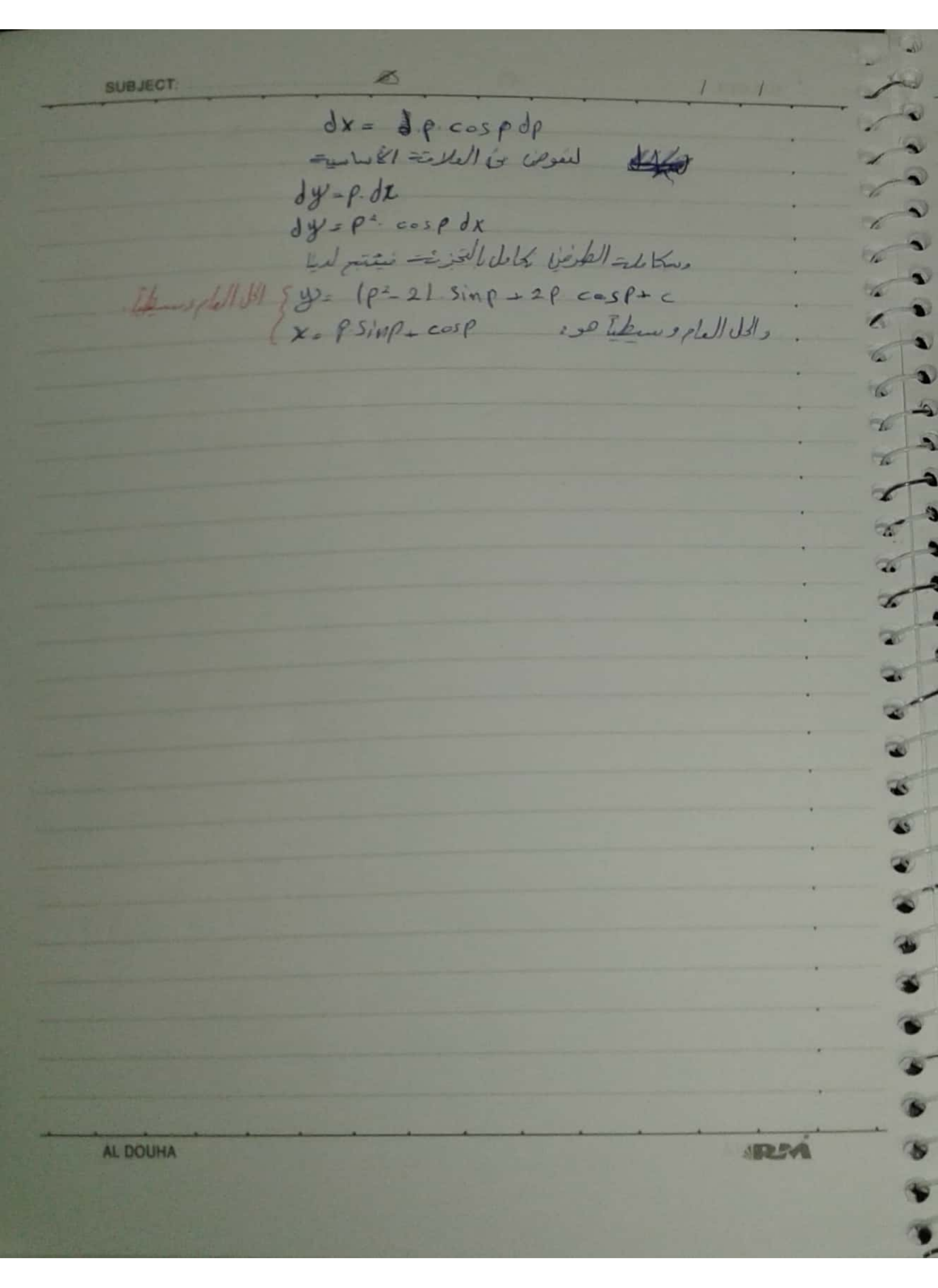
مثال 2: $y' \sin y' + \cos y' - x = 0$

بفرض $y' = p$

$$p \cdot \sin p + \cos p - x = 0$$

$$x = p \cdot \sin p + \cos p$$

$$dx = \sin p\,dp + p \cdot \cos p\,dp - \sin p\,dp$$



SUBJECT:

$$dx = 2p \cdot \cos p \, dp$$

نعوض في العلاقة الأساسية

$$dy = p \cdot dx$$

$$dy = p^2 \cos p \, dx$$

وبمكاملة الطرفين بتكامل بالتجزئة ينتج لدينا

والحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} y = (p^2 - 2)\sin p + 2p\cos p + c \\ x = p\sin p + \cos p \end{cases}$$

الحل العام وسيطياً

AL DOUHA

RM